LAURBERG & GAD FOT. FOTOTYPI PACHT & CRONE'S EFTF.

H G Zeuthen

II.

H. G. ZEUTHEN.

(15. Februar 1839—6. Januar 1920.)

Af C. Juel.

(Tale i Videnskabernes Selskabs Møde, den 16. Januar 1920.)

Vor afdøde mathematiske Nestor Professor Zeuthens Liv frembyder mange Sider.

Vi har for nogle Øjeblikke siden hørt vor højtærede Præsident tale om Zeuthens Betydning for Videnskabernes Selskab, i hvilket han i en lang Aarrække var Sekretær. Ogsaa ved Universitetet har Prof. Zeuthen spillet en stor Rolle. Derom skal jeg kun sige, at hans Elever — og alle danske Mathematikere indtil de sidste Aargange er hans Elever — beundrede hans omhyggeligt udarbejdede Forelæsninger og var taknemmelige for den Velvilje og varme Interesse, han med sin humane Karakter viste alle os Studerende.

Men jeg skal her alene holde mig til Zeuthen som Mathematiker, til den Virksomhed, om hvilken det uden Overdrivelse kan siges, at den har kastet Glans ikke alene over dette Selskab og over Universitetet, men ogsaa over vort Land.

Det er næsten unødvendigt at bemærke, at hvad jeg her kan sige, kun kan være højst ufuldstændigt ligeoverfor en Forfatter, der har skrevet henimod et Par Hundrede større og mindre Arbejder, deriblandt mange store.

Zeuthen fødtes 1839 i et Præstehjem i Vestjylland med megen videnskabelig og litterær Interesse, og det har paa ingen Maade været uden Indflydelse paa hans videnskabelige Produktion. Jeg tænker herved dels paa hans historiske og dels paa hans filosofiske Interesser, der var tidlig vakte, og som særlig viste sig i noget senere Arbejder.

Han tog Eksamen 1857 fra Sorø Skole og var der i nogle Aar Elev sammen med sin senere Universitetskollega afd. Prof. Julius Petersen. Dette har muligvis paavirket ham, i hvert Fald er det sikkert, at han efter at være bleven Student straks bestemte sig til at studere Mathematik. Han blev hurtigt en flittig Medarbejder ved det danske mathematiske Tidsskrift, der 1859 blev stiftet af daværende Direktør Tüchsen og Professor Schellerup. Hans første Arbejder heri var ikke geometriske, men analytiske. Jeg nævner dette for en Gang for alle at faa Lejlighed til at bemærke, at Zeuthen paa ingen Maade var speciel i sin mathematiske Produktion. Tvertimod, der er ingen dansk Mathematiker — og maaske ikke saa overordentlig mange udenlandske — der har skrevet om saa mange forskellige Ting som Zeuthen. Ogsaa hans Stilling som mangeaarig Lærer ved den polytekniske Læreanstalt førte ham ind paa særlige Opgaver. Jeg skal som Eksempel minde om et Par fortrinlige Afhandlinger om Tovpolygoner.

Men i det følgende nødes jeg til alene at holde mig til Arbejder, hvor han ydede noget afgørende. Og det varede ikke længe, inden han fandt sit rette Felt. Efter at have taget Magisterkonferensen i 1862 drog han 1863 til Paris for at fortsætte sine mathematiske Studier under Chasles, den som af alle Mathematikere utvivlsomt har øvet den største Indflydelse paa ham. Chasles er Grundlæggeren af Antalgeometrien, særlig af Karakteristikteorien, og netop i den Retning blev Zeuthen den store Mester. Den Sikkerhed, hvormed han opererede med herhen hørende ofte meget vanskelige Opgaver, var uforlignelig og er næppe naaet af nogen anden.

Hans første Arbejde i den Retning var hans Doktorafhandling fra 1865 „Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit, der er underkastede fire Betingelser“, et Arbejde, der straks vandt almindelig Anerkendelse og blev oversat i „Nouvelles Annales de M“ allerede 1866. Zeuthen gik dernæst over til Fladerne af anden Orden og bestemte Karakteristikerne i de elementære Systemer af Flader af anden Orden. Det er karakteristisk baade for Zeuthens Karakter og for hans Respekt for Chasles, at han, da han erfarede, at denne gav sig af med samme Arbejde, ikke skyndte sig med at offentliggøre sine Resultater, men indleverede dem i en lukket Konvolut til dette Selskab med Anmodning om først at aabne den efter Offentliggørelsen af Chasles' Afhandling.

Undersøgelser af den Art fortsatte han nu, og de kulminerede i den store og omfattende „Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer af fjerde Orden“ i dette Selskabs Skrifter. Det er et af Zeuthens Hovedværker og bærer Vidnesbyrd om Forf.s uhyre Energi og Arbejdsevne. Det er nemlig en overordentlig kompliceret Opgave, der behandles; allerede Talregningerne maa have krævet megen Tid. Saaledes findes som Antal af de Kurver af fjerde Orden, der berører 13 givne rette Linier og gaar gennem et givet Punkt:

$$2301119144.$$

Og dog vilde man tage helt fejl af Zeuthens Opfattelse, hvis man troede, at han saa et Hovedformaal for Methoderne i at danne saadanne formidable Antal, tvertimod — ogsaa det kunde han gøre, naar det krævedes, — men han hævdede iøvrigt netop stærkt, at Hovedformaalet laa i Dannelse af saadanne helst simple Tal, som kunde lede til overskuelige geometriske Sætninger.

Zeuthens Methoder i disse Arbejder er væsentlig to: for det første en rigt moduleret Anvendelse af Chasles' Korrespondanceprincip, for det andet en omhyggelig Undersøgelse af de Ændringer i Udseende og i Antal og Beskaffenhed af Kurvens singulære Punkter, der sker ved Overskridelse af udartede Kurver i de Systemer, han betragter. Det sidstnævnte er særlig karakteristisk for Zeuthen.

Jeg maa nu nævne nogle Arbejder fra samme Periode, hvor Methoden vel i det væsentlige var den samme, men som dog havde en nogen anden Karakter; de hører til hans allerbetydeligste Præstationer.

Den ene Gruppe af disse Arbejder handler om Slægtssætningen, d. v. s. om det Tal, som udtrykt ved Kurvens egne Tal, bliver uforandret ved at gaa over fra en Kurve til en anden, der svarer Punkt for Punkt til den første. Zeuthens Bevis for den — tidligere bekendte — Slægtssætning er ganske simpel. Svarer paa de to Kurver γ og γ_1 et Punkt M paa γ til et Punkt M_1 paa γ_1, forbinder man M med et fast Punkt A, og M_1 med et andet fast Punkt B. Skæringspunktet mellem Linierne AM og BM_1 har da til geometrisk Sted en vis Kurve, og man faar den søgte Relation ved at udtrykke, at der fra A og fra B gaar lige mange Tangenter til denne Kurve. Methoden er karakteristisk for Zeuthen, og jeg nævner den, da den samme med passende Ændringer er brugt i en Række andre Problemer. Et Bevis af en noget lignende Karakter var givet omtrent samtidig af en italiensk Mathematiker Ruffini, men Zeuthen benyttede straks sin Methode til at udvide Sætningen ogsaa til det Tilfælde, hvor der ikke er éntydig men flertydig Sammenhæng mellem Kurverne, og udledede, hvad man kalder Zeuthens udvidede Slægtssætning. Ganske vist har man senere bemærket, at man kan faa samme Sætning ved at anvende den gamle Abel-Riemann-Clebsch-ske Slægtssætning paa en flerdobbelt tænkt Kurve, men Navnet er dog berettiget, thi dels er Zeuthen den første, der har opstillet denne overordentlig vigtige Sætning, dels har han givet en Mængde Anvendelser af den. Særlig har han benyttet Sætningen til i visse Tilfælde at bestemme Løsningers Multiplicitet, en Bestemmelse han i tidligere Arbejder foretog paa andre Maader. Vi har her et Eksempel paa Zeuthens Energi — aldrig bliver han træt af at forbedre sine Methoder, lige saa lidt som han betænker sig paa at opgive en Methode, naar han kan finde en anden, der synes ham bedre.

Ligeledes har han ad lignende Veje, som den nævnte undersøgt og bestemt Dobbeltpunkterne ved flertydige Afhængigheder i Planen og Rummet, og som den første funden en Invariant, der optræder ved den éntydige Transformation af en algebraisk Flade i en anden. Værdien af denne sidste Undersøgelse blev knap nok straks forstaaet. Det kom først, da italienske Mathematikere henimod det forrige Aarhundredes Slutning uafhængig af Zeuthen og ad helt andre Veje var kommen til samme Resultat. Jeg erindrer, det var Zeuthen en stor Tilfredsstillelse, da han langt senere gjorde sin sidste store Udenlandsrejse, at de italienske Mathematikere med stor Beredvillighed anerkendte hans Prioritet paa dette Punkt. Invarianten hedder i Reglen nu den Zeuthen-Segreske Invariant.

Der er endnu et Par Arbejder, jeg maa omtale. De er i og for sig af stor Værdi — for mig har de haft en særlig Betydning. Den ene handler om Formen af algebraiske Kurver af fjerde Orden, den anden om rette Linier paa algebraiske Flader af tredie Orden. Det er ved Studiet af disse Afhandlinger, at det i sin Tid lykkedes mig at udvide en Del af de deri indeholdte Sætninger til ogsaa at gælde om ikke algebraiske Kurver og Flader. Det er mig umuligt at tale om Zeuthens Arbejder uden at udbede mig Tilladelse til ogsaa her at bringe disse to Afhandlinger min Hyldest.

Ved Tiden henimod 1880 sker der en Standsning i Prof. Zeuthens systematiske Undersøgelser. Hans Interesser var begyndt at dreje sig henimod Historien. Zeuthens Interesse for historiske Undersøgelser gik langt tilbage. Fra en mundtlig Bemærkning ved jeg, at det var Prof. Oppermann, der allerede, da Zeuthen var Student, henledede hans Opmærksomhed paa de Opgaver, der her laa for. Hans første historiske Arbejde var en lille Artikel i Mathematisk Tidsskrift fra 1876 om Brahmaguptas Trapezer. Men han skulde snart finde et rigere Arbejdsfelt, og man kan næsten datere Tidspunktet derfor. Det var nemlig ved Prof. Heibergs Doktorafhandling: „Quæstiones Archimedeæ“. Det, som i denne Afhandling mest vakte Mathematikernes Opmærksomhed, var det af Doktoranden kritisk fremhævede Spørgsmaal om Archimedes' Kvadratrodsuddragninger. I Handlingen deltog fra Mathematikernes Side foruden Zeuthen ogsaa Professorerne Steen og Oppermann. Om Zeuthens Hypothese var helt fyldestgørende, er her mindre væsentligt, den var i hvert Fald interessant. Det, som man i det korte Referat derom, han skrev i Tidsskrift f. Mathematik, mest lægger Mærke til, er, at Zeuthen her straks viser sig klar over Forbindelsen mellem de forskellige Perioder i den græske Mathematik. Han erkender, at de af Euclid i geometrisk Form opstillede Sætninger ogsaa efter Euclids egen Opfattelse havde en arithmetisk Anvendelighed — noget han senere uddybede ved sin Opstilling af en græsk Arithmetik og en græsk Algebra i geometrisk Form. Ligeledes gør han opmærksom paa Forbindelsen mellem Euclid og Diofant, hvorved man ikke maa glemme, at mange endnu paa den Tid stod saa uforstaaende overfor den græske Mathematik, at der kunde fables om en indisk Indflydelse paa Diofant.

Allerede i 1885 fremkom saa den store „Keglesnitslæren i Oltiden“, der fastslog Zeuthens Ry som mathematisk Historiker. Den græske Forf., som her fremfor andre kommer paa Tale, er Apollonius. Denne begynder med at definere Keglesnit som Snit i cirkulære Kegler — men fortsætter dernæst ad ren plangeometrisk Vej. Zeuthen godtgør fuldstændig, at denne Vej i alt væsentlig er den samme som den, der bruges i den nuværende analytiske Geometri med Parallelkoordinater, og paaviser med stor Sandsynlighed, at Apollonius ogsaa (paa Navnene nær) har kendt ikke ringe Dele af Projektivgeometrien. (Noget lignende var ogsaa Chasles kommen ind paa, men knyttede sine Betragtninger til den senere Pappus.). Hvorfor Apollonius begynder sin Bog med Keglen, stod indtil videre hen i det uvisse, da han egentlig ligesaa godt kunde have begyndt med Kurvernes Ligninger, direkte knyttede til Fladeanlæg, — men ogsaa dette skulde Zeuthen senere forklare. Den indgaaende Behandling af Archimedes er i og for sig ogsaa interessant, men er særlig værd at notere som det første Skridt i de Undersøgelser over Infinitesimalregningens Forhistorie, som han senere saa ofte med Forkærlighed vender tilbage til.

Af den følgende Række historiske Arbejder er der et, som jeg maa standse ved. Det fremkom ved det skandinaviske Naturforskermøde i København i 1892. Det indeholder i al sin Simpelhed en Opfattelse, som jeg ikke betænker mig paa at sige er af afgørende Betydning for Forstaaelsen af adskillige Punkter i Oldtidens Mathematik. Zeuthen siger her simpelthen, at i Oldtiden var Konstruktionen Eksistensbevis. Naar Euclid i sin 1ste Bogs 1ste Sætning lærer at konstruere en ligesidet Trekant, er det ikke for at gøre opmærksom paa, at en saadan kan man konstruere, naar man har Lineal og Passer ved Haanden, men for at sikre sig, at en saadan Trekant efter hans Forudsætninger eksisterer. Man faar blandt andre Ting ogsaa ved den nye Opfattelse at vide, hvorfor Apollonius begyndte sin Keglesnitslære med at opfatte Kurverne som Snit i cirkulære Kegler. Nu ser man, at det var for at sikre sig Kurvernes Eksistens som saadanne, idet Cirklens Eksistens for Euclid er axiomatisk givet. Man ser, at Zeuthen stadig vender tilbage til sine Opgaver for at komme dybere ind paa dem.

Der er særlig et Punkt, hvor Betydningen af Zeuthens Opfattelse er væsentlig, det er ved Forstaaelsen af Parallelaxiomet. Dette kaldtes i tidligere Tid det XI Axiom, men blev senere hen af textkritiske Grunde stillet paa sin rette Plads som det 5te Postulat. Men først Zeuthens Bemærkning gav den rent mathematiske Forklaring heraf: Parallelaxiomet er et Eksistenspostulat ligesom de øvrige Postulater.

Ved Tiden henimod Slutningen af det forrige Aarhunddrede begynder den tredie, den sidste og heldigvis lange Periode af Prof. Zeuthens videnskabelige Liv, og den er paa ingen Maade den mindst interessante. Nu følger en uafbrudt Række af systematiske og af historiske Arbejder skiftevis efter hinanden. Jeg maa ved Omtalen heraf indskrænke mig til dels at nævne nogle enkelte af Arbejderne, dels at gøre opmærksom paa, hvorvidt der er fremkommen nye Synspunkter. Nye Enkeltheder kan der ikke være Tale om at tage Hensyn til.

Jeg vil straks bemærke, at der i dette Tidsrum sker en paafaldende Udvikling i formel Henseende. Zeuthens Stil har altid været ulastelig, nu bliver den mere og mere letflydende; flere af de senere Arbejder er det en æsthetisk Nydelse at læse. Saaledes synes jeg, at den korte Oversigt over den ældre Tids Mathematik, som Zeuthen — ganske vist paa Tysk — skrev i „Kultur der Gegenwart" er en Perle af en populær historisk Fremstilling. Men i rent videnskabelig Henseende er det nævnte Arbejde naturligvis kun en Affødning af hans store ogsaa udmærket skrevne: Mathematikens Historie fra Oldtiden til Begyndelsen af det attende Aarhundrede. I det andet Bind fra 1903 maa jeg særlig beundre den glimrende Fremstilling af Descartes; dennes Mangesidighed har aabenbart tiltalt Zeuthen. Men Hovedsagen i dette andet Bind er den udførlige Behandling af Infinitesimalregningens Forhistorie, og her spiller, inden Hovedmændene Newton og Leibniz træder frem, naturligvis særlig Barrow og Fermat, mest den sidste, Hovedrollen.

Zeuthen forberedte sin samlede Fremstilling ved en Række Monografier, de fleste i Vidensk. Selsk. Skrifter. Det har her Interesse at se, hvorledes han i disse arbejder sig frem til stedse større Klarhed over Problemerne, — et nyt ikke uinteressant Vidnesbyrd om hans stadige Arbejde, altid stræbte han efter det bedste, han kunde give.

Som Eksempel paa det Samarbejde med Prof. Heiberg, som jeg før har nævnt, skal jeg minde om hans Medarbejderskab ved Udgivelsen af det mærkelige Skrift af Archimedes: „Ephodikon“, som i 1909 blev fundet af Prof. Heiberg.

Jeg skal nu vende mig til Zeuthens systematiske Arbejder i denne Periode. Her samler Hovedinteressen sig om det store Værk: „Lehrbuch der abzählenden Methoden in der Geometrie“, hvori det lykkedes Prof. Zeuthen at samle Hovedindholdet af sine antalgeometriske Undersøgelser. Naar jeg siger „samle“, er det dog for lidt; der findes deri adskilligt nyt og interessant, som ikke var fremkommet tidligere. Det er en Bog, som holder mere end dens Titel lover. Det er i Virkeligheden den fuldstændigste Lærebog i den algebraiske Geometri, som overhovedet findes. Men alt er nu bearbejdet og bragt paa sin simpleste Form. Jeg har allerede tidligere nævnt, at Zeuthen i sin første Periode lagde hele Hovedvægten paa Chasles' Korrespondanceprincip. Dette Princip bibeholdes naturligvis, det er aldeles nødvendigt, og det uddybes ved de Tilføjelser, som er gjorte af den af Zeuthen højt beundrede Halphén. Men det er dog stillet i Baggrunden og Princippet for Antallenes Vedligeholdelse er stillet i Spidsen. Zeuthen havde ganske rigtigt set, at denne Methode baade hurtigere og overskueligere end nogen anden fører til Maalet — men for at bruge den med Sikkerhed kræves rigtignok den geometriske Takt, hvori Zeuthen var den uforlignelige Mester. Som Eksempel paa det nye i Bogen skal jeg fremhæve den Klarhed, han her har naaet ved det vanskelige Spørgsmaal om brudne Valenser i den Brill-Nøtherske Sætning.

Til Slutning skal jeg om end kun med nogle faa Ord vende mig til Zeuthens historiske Arbejder fra hans sidste

Aar. Efter tidligere at være trængt dybt ind i Oldtidens mathematiske Viden fra dens Guldalder gaar han i sine sidste Arbejder længere tilbage, han søger det naturlige og ligefremme Grundlag, som maa gaa forud for enhver formel Opbygning af en Videnskab. Og ad den Vej er han ogsaa kommen til at interessere sig for de ganske moderne Undersøgelser over Geometriens Grundlag — begge Steder ser han i det intuitive i Intuitionen den Undergrund, hvorfra ogsaa alle mathematiske Ideer maa have deres Udspring.

Og saaledes ser han ud fra sit Synspunkt det ældste og det nyeste i hans Videnskab slutte sig sammen — og med en skønnere Opfattelse kunde et videnskabeligt Liv ikke afsluttes.

En Mand med Prof. Zeuthens videnskabelige Anseelse samlede naturligvis i sit lange Liv en Mængde indenlandske og udenlandske Udmærkelser. Han var betydelig nok til ikke alene at kaste Glans over dansk Mathematik, men over vort Land, og mange er vi, der i Udlandet har haft Gavn af at have en Mand med Zeuthens internationale Anseelse i Spidsen.

Men for os, der har haft den Lykke at kende ham nøjere, betyder han ved Siden deraf endnu noget andet. Der er i enhver Stilling i Livet noget, der hedder Troskab mod sin Gerning — og dette gælder ikke mindst i Videnskaben. Og i den Henseende er Zeuthen os et lysende Forbillede: aldrig lagde han sig til Hvile paa sin Berømmelse, altid arbejdede han videre til større Fuldkommengørelse til sine sidste Dage.

Mindet om ham og hans Gerning vil leve længe.